Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas IV (MA-2115)
Septiembre-Diciembre 2008

1ra Autoevaluación

Material Cubierto: La presente autoevaluación versa sobre el material cubierto en las clases 1 a 7 del cronograma del curso, es decir, las secciones 9.1 a 9.8 del Purcell, Varberg y Rigdon, 9na edición.
Nota: La presente autoevaluación no tiene ningún valor para la nota final de este curso.
Instrucciones: Esta autoevaluación consta de 3 partes, que preferiblemente deberían ser resueltas en orden (es decir, primero la parte 1, luego la parte 2, y por último la parte 3) y después que Ud. haya estudiado el material correspondiente. Cada parte tiene sus propias instrucciones. Las respuestas están al final de cada parte. Esta autoevaluación puede ser bajada de la página web del departamento de matemáticas `http://www.ma.usb.ve/`. Se le sugiere revise frecuentemente dicha página web, ya que a lo largo del trimestre irán apareciendo más autoevaluaciones.
Notación La función logaritmo natural, es decir, la función inversa de $g(x) = e^x$ se denotará por $f(x) = \log(x)$ (siguiendo la convención usada en los problemarios de las preparadurías[1]).
Sobre el tiempo estimado: El tiempo estimado de cada sección se obtuvo multiplicando por 5 el tiempo que me tomó a mí resolver los problemas (en algunos casos agregando unos minutos para tener, por ejemplo, 25min en vez de 22min 30seg).
¿Comentarios, preguntas o errores? Escriba a la dirección `fojeda@usb.ve` (Prof. Francisco Ojeda). Por favor use el código (MA-2115) o nombre de este curso en el encabezado de su mensaje (ya que en caso contrario por desconocer al remitente probablemente borre su mensaje sin leerlo).

1. Sin desarrollo

Tiempo estimado: 25 minutos
Instrucciones: Marque la respuesta correcta en cada una de las siguientes preguntas. No hace falta que justifique sus respuestas. Al finalizar, y antes, de proceder a la parte 2, verifique si sus soluciones son correctas. Si Ud. tuvo una o más preguntas erradas, o simplemente adivinó la(s) respuesta(s), se le sugiere revise el texto o sus apuntes antes de proseguir.

1.1. Preguntas

Pregunta 1.1. Suponga que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Entonces el $\lim_{n\to\infty} a_n$ es igual a

(a) 1

[1] Observe que en el Purcell, Varberg y Rigdon a la función logaritmo natural se denota por $f(x) = \log(x)$

(b) ∞

(c) 0

(d) No se puede decir nada del límite sin tener más información sobre la sucesión $\{a_n\}$

(e) -1

Pregunta 1.2. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si y sólo si

(a) $p \in \mathbb{R}$

(b) $p > 0$

(c) $p = 1$

(d) $p > 1$

(e) $p \geq 1$

Pregunta 1.3. Suponga que $|r| < 1$. La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge a

(a) $\frac{1}{1-r}$

(b) $\frac{r}{1-r}$

(c) $\frac{1}{r-1}$

(d) $\frac{1}{1+r}$

(e) $\frac{1}{r}$

Pregunta 1.4. Suponga que $0 \leq a_n \leq b_n$ para $n \geq N$, y que la serie $\sum b_n$ converge, entonces

(a) la serie $\sum a_n$ diverge

(b) no se puede concluir nada sobre la convergencia de la serie $\sum a_n$

(c) la serie $\sum a_n$ converge

(d) la serie $\sum (a_n + b_n)$ diverge

(e) ninguna de las anteriores

Pregunta 1.5. Tenemos que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con

(a) $a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$

(b) $a_n = \frac{1}{n!}$

(c) $a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$

(d) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

(e) ninguna de las anteriores

Pregunta 1.6. Sea f una función tal que $f(n) = a_n$ para $n \geq N$. Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, entonces

(a) No se puede concluir nada sobre $\lim_{n\to\infty} a_n$

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n = -L$

(d) $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

(e) ninguna de las anteriores

Pregunta 1.7. ¿Cuál de los siguientes **no** puede ser el conjunto de convergencia ninguna serie de potencia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$?

(a) $\{0\}$

(b) $(-R, R)$ para cierto número R mayor que cero.

(c) $(-R, R]$ para cierto número R mayor que cero.

(d) $\mathbb{R}$

(e) $[0, R]$

Pregunta 1.8. El criterio de la integral dice: Sea f una función continua, positiva no creciente en el intervalo $[1, \infty)$ tal que $f(n) = a_n$ para $n \in \mathbb{N}$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y sólo si la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge. En el caso en él que la serie converja, el error que se comete al aproximar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ usando $\sum_{n=1}^{N} a_n$ está acotado por

(a) $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$

(b) $\int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx$

(c) $\int_{N+2}^{\infty} f(x)\,dx$

(d) $\frac{1}{2}\int_N^{\infty} f(x)\,dx$

(e) ninguna de las anteriores

Pregunta 1.9. La función coseno tiene serie de potencia, centrada en 0, dada por

(a) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$

(b) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$

(c) $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$

(d) $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$

(e) $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$

Pregunta 1.10. Si la serie $\sum |a_n|$ converge, entonces

(a) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1$

(b) la serie $\sum a_n$ diverge

(c) no se puede concluir nada sobre la convergencia de la serie $\sum a_n$

(d) la serie $\sum a_n$ converge

(e) ninguna de las anteriores

Las respuestas a esta parte se encuentran en la página siguiente

1.2. Respuestas

Las siguientes son las respuestas de la primera parte:
1.1(c), 1.2(d), 1.3(a), 1.4(c), 1.5(b), 1.6(d), 1.7(e), 1.8(a), 1.9(e), 1.10(d).

2. Desarrollo

Tiempo estimado: 1hora 40 minutos
Instrucciones: Resuelva los siguiente problemas, justificando sus respuestas. Marque la respuesta correcta en cada una de las siguientes preguntas. Al finalizar, y antes, de proceder a la parte 3, verifique si sus respuestas son correctas. Se le sugiere que también lea las resoluciones de los problemas proporcionados. Recuerde si su solución y la solución publicada difieren en el procedimiento, esto no necesariamente significa que su solución sea incorrecta, ya que puede haber más de una manera de resolver un problema. Por otro lado, el hecho que Ud. haya indicado la respuesta correcta, no significa que el procedimiento que Ud. usó esté necesariamente bien. Si Ud. tiene una duda respecto a su solución o a la solución proporcionada se le sugiere consulte a su profesor.

2.1. Preguntas

Pregunta 2.1. El límite de la sucesión $a_n = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n$ cuando n tiende a infinito

(a) es igual a e^{-3}

(b) es igual a e^3

(c) diverge

(d) es igual a e

(e) Ninguna de las anteriores

Pregunta 2.2. Estudie la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{n\sqrt[3]{n}}$.

(a) Converge

(b) Diverge

Pregunta 2.3. Estudie la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$.

(a) Converge

(b) Diverge

Pregunta 2.4. Encuentre el conjunto y radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^n}{\sqrt{n}}$

(a) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $R = \frac{1}{2}$

(b) $[-2, 2]$ y $R = 2$

(c) $[-2, 2)$ y $R = 2$

(d) $(-1,1)$ y $R = 1$

(e) $[-1,1)$ y $R = 1$

Pregunta 2.5. Encuentre una representación en serie de potencias para la función $\frac{x}{4+x^2}$ y halle su radio de convergencia.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{4^{n+1}}$ y radio 2

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{4^{n+1}}$ y radio 2

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{4^{n+1}}$ y radio 1

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}}$ y radio 2

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}}$ y radio 1

Las respuestas a esta parte se encuentran en la página siguiente

2.2. Respuestas

2.1(a), 2.2(a), 2.3(b), 2.4(e), 2.5(a)

2.3. Resolución de los problemas

Solución 2.1. Para calcular este límite podemos usar el hecho que

$$\text{Si } \lim_{x\to\infty} f(x) = L \text{ y } f(n) = a_n \text{ para } n \in \mathbb{N}, \text{ entonces } \lim_{x\to\infty} a_n = L.$$

Entonces calculamos

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\exp\left(\log\left\{\left(1-\frac{3}{x}\right)^x\right\}\right)$$

y entonces por la continuidad de la función exponencial nuestro problema se reduce a calcular

$$\lim_{x\to\infty}\log\left\{\left(1-\frac{3}{x}\right)^x\right\} = \lim_{x\to\infty} x\log\left(1-\frac{3}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}}.$$

Ahora nuestro límite es de la forma $\frac{0}{0}$ por lo cual intentamos resolverlo usando la regla de L'hopital obteniendo

$$\lim_{x\to\infty}\log\left\{\left(1-\frac{3}{x}\right)^x\right\} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1-\frac{3}{x}}\left(\frac{3}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} -\frac{3}{1-\frac{3}{x}} = -3.$$

Entonces $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x = \exp(-3) = e^{-3}$ y finalmente

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n = e^{-3}.$$

Solución 2.2. Recordemos que $-1 \le \cos(x) \le 1$ para $x \in \mathbb{R}$. Esto es equivalente a $|\cos(x)| \le 1$, y elevando al cuadrado a ambos lados obtemenos que $\cos^2(x) < 1$, donde hemos usado que para $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $x^2 = |x|^2$. Tenemos entonces que para $n \in \mathbb{N}$ que

$$0 \le \frac{\cos^2(n)}{n\sqrt[3]{n}} \le \frac{1}{n\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}.$$

Entonces por el *criterio de comparación ordinaria* y el *criterio de la serie p* (en este caso $p = \frac{4}{3} > 1$) se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2(n)}{n\sqrt[3]{n}}$ converge.

Solución 2.3. En un primer (y rápido intento) calculamos $\lim_{n\to\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ con la esperanza que este límite sea distinto de cero en cuyo caso la seria divergería, pero como $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ y la función seno es continua, tenemos que $\lim_{n\to\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \operatorname{sen}(0) = 0$. Tristemente esto no nos da ninguna información respecto a la convergencia de nuestra serie.

Después de pensar un rato se nos ocurre que quizás podemos usar el *criterio de comparación del límite* (para eso hace falta que $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ sea ≥ 0, pero como $0 < \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2}$ y el seno es positivo en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ esto es cierto). La pregunta es ¿con qué serie podríamos comparar? Recordamos ahora el límite[2] $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$ y vemos que podemos usar la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Entonces como $\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$, tenemos por el criterio de comparación del límite que ambas series convergen o divergen juntas, pero como la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge (por ejemplo usando el *criterio de la serie p*), tenemos entonces que $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge.

[2]Este límite se vió en MA1111.

Solución 2.4. Sea $b_n = \frac{2x^n}{\sqrt{n}}$ para $x \neq 0$ [3], calculamos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{2x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right|}{\left|\frac{2x^n}{\sqrt{n}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} |x| = |x| .$$

Entonces por el *criterio del cociente absoluto* tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^n}{\sqrt{n}}$ converge[4] para $|x| < 1$ y diverge para $|x| > 1$. Entonces el radio de convergencia es 1. Para hallar el conjunto de convergencia nos hace falta ver que ocurre en $x = 1$ y $x = -1$. Cuando $x = 1$, tenemos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}$ que diverge por el *criterio de la serie p* (en este caso $p = \frac{1}{2} \leq 1$). Cuando $x = -1$ tenemos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\sqrt{n}}$ que es una serie alternante de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^n$ con $a_n = \frac{2}{\sqrt{n}}$ que claramente es positivo, decreciente y satisface $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$. Entonces por el *criterio de la serie alternante* tenemos que la serie converge en $x = 1$. Entonces el conjunto de convergencia es $[-1, 1)$.

Solución 2.5. Tenemos que

$$\frac{x}{4+x^2} = \frac{x}{4}\left(\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}\right) = \frac{x}{4}\left(\frac{1}{1-\left(-\frac{x^2}{4}\right)}\right).$$

Usando la fórmula para la serie geométrica tenemos (bajo la suposición que $\left|\left(-\frac{x^2}{4}\right)\right| < 1$) que

$$\frac{x}{4+x^2} = \frac{x}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{4^{n+1}}$$

Como la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^n$ converge solamente cuando $\left|\left(-\frac{x^2}{4}\right)\right| < 1$ y

$$\left|\left(-\frac{x^2}{4}\right)\right| < 1 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2$$

tenemos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{4^{n+1}}$ tiene radio de convergencia 2.

3. Desarrollo. Más problemas

Tiempo estimado: 1 hora 55 minutos
Instrucciones: Resuelva los siguiente problemas, justificando sus respuestas. Marque la respuesta correcta en cada una de las siguientes preguntas. Al finalizar, verifique si sus respuestas son correctas. Se le sugiere que también lea las resoluciones de los problemas proporcionados. Recuerde si su solución y la solución publicada difieren en el procedimiento, esto no necesariamente significa que su solución sea incorrecta, ya que puede haber más de una manera de resolver un problema. Por otro lado, el hecho que Ud. haya indicado la respuesta correcta, no significa que el procedimiento que Ud. usó esté bien. Si Ud. tiene una duda respecto a su solución o a la solución proporcionada se le sugiere consulte a su profesor.

[3] Una serie de potencia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ siempre converge en $x = 0$, así que realmente sólo hace falta analizar que ocurre cuando $x \neq 0$.

[4] Siendo más precisos, el criterio del cociente absoluto nos dice que nuestra serie converge para $|x| < 1$ y $x \neq 0$.

3.1. Preguntas

Pregunta 3.1. Sea $\{a_n\}$ la sucesión definida por $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 4)$ para $n \geq 2$. Determine si la sucesión $\{a_n\}$ es convergente o no. En caso afirmativo calcule el límite.

(a) diverge

(b) converge a 2

(c) converge 4

(d) converge -2

(e) converge a $\frac{1}{2}$

Pregunta 3.2. Justificando su razonamiento encuentre una cota para el error, que se comete al aproximar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ con la suma finita $\sum_{n=1}^{4} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

(a) Una cota para el error es $\frac{1}{5}$

(b) Una cota para el error es $\frac{1}{7}$

(c) Una cota para el error es $-\frac{1}{4}$

(d) Una cota para el error es $\frac{1}{6}$

(e) Ninguna de las anteriores

Pregunta 3.3. Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge. En caso de que la serie converja calcule su límite.

(a) converge a 1

(b) converge a 2

(c) diverge

(d) converge a 3

(e) converge a $\frac{1}{3}$

Pregunta 3.4. Halle la representación en serie de potencias para la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ alrededor del punto $c = \frac{\pi}{4}$. **Notación:** $[n/2]$ es la parte entera de $n/2$

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(-1)^{[n/2]}}{n!} (x + \frac{\pi}{4})^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(-1)^{[n/2]}}{n!} (x + \frac{\pi}{4})^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(-1)^{[n/2]}}{n!} (x - \frac{\pi}{4})^n$

Pregunta 3.5. Encuentre el conjunto y radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{x}{3}\right)^{2n}$

(a) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ y $R = \frac{1}{3}$

(b) $(-3, 3]$ y $R = 3$

(c) $(-2, 2)$ y $R = 2$

(d) $(-1, 1)$ y $R = 1$

(e) $[-3, 3]$ y $R = 3$

Las respuestas a esta parte se encuentran en la página siguiente

3.2. Respuestas

3.1(c), 3.2(a), 3.3(a), 3.4(e), 3.5(e)

3.3. Resolución de los problemas

Solución 3.1. En el caso en él que la sucesión $\{a_n\}$ convergiera a un número L tendríamos dejando que $n \to \infty$ en la igualdad

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 4)$$

que

$$L = \frac{1}{2}(L+4) \Rightarrow L = 4.$$

Así que si la sucesión converge, tiene que converger a 4. Pero todavía no sabemos si converge o no. Para ello usamos el *teorema de la sucesión monótona*, es decir, vamos a ver que nuestra sucesión es no decreciente y acotada superiormente y una vez verificado esto tendremos que la sucesión converge. Primero probamos que la sucesión es no decreciente usando inducción. Para $n = 1$, tenemos que $a_1 = 2 \leq 3 = \frac{1}{2}(2+4) = a_2$. Suponemos ahora que $a_n \leq a_{n+1}$ y queremos ver que $a_{n+1} \leq a_{n+2}$. Tenemos que

$$a_n \quad \leq \quad a_{n+1} \Leftrightarrow a_n + 4 \leq a_{n+1} + 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a_n+4) \leq \frac{1}{2}(a_{n+1}+4)$$

La última desigualdad dice, recordando la definición de a_n, que $a_{n+1} \leq a_{n+2}$, que es lo que queríamos probar. Por lo tanto hemos probado que $\{a_n\}$ es no decreciente. De manera análoga se puede probar por inducción que $a_n \leq 4$ para $n \in \mathbb{N}$ (recuerden que 4 es el candidato al valor del límite). Si no se quiere usar inducción se puede dar el siguiente argumento (que funciona ahora que sabemos que nuestra sucesión es no decreciente): para $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \leq a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n+4) \Leftrightarrow 2a_n \leq a_n + 4 \Leftrightarrow a_n \leq 4.$$

Esto termina la verificación de que $\{a_n\}$ converge y ya vimos que entonces el límite es 4.

Solución 3.2. Observamos que nuestra serie es alternante y además satisface las hipótesis del *criterio de la serie alternante* (ya que es de la forma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ con $a_n = \frac{1}{n}$, y a_n es claramente decreciente, positiva y satisface $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$). Sabemos entonces que la suma $\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ aproxima a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ con un error menor o igual a $a_{N+1} = \frac{1}{(N+1)}$. En nuestro caso particular estamos interesados en $N = 4$ y por lo tanto una cota para el error en el que estamos interesados es $\frac{1}{5} = 0,2$.

Solución 3.3. Usamos el método de fracciones parciales[5] (o simples) para reescribir $\frac{1}{n(n+1)}$. Sabemos que existen constantes A y B tales que

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}.$$

[5]Esto se vió en MA1112 en el contexto de integración de funciones racionales.

Entonces multiplicando por $x(x+1)$ a ambos lados de la igualdad obtenemos $1 = (x+1)A + xB$. Sustituyendo primero $x = 0$ y luego $x = -1$ en la igualdad anterior obtenemos que $A = 1$ y $B = -1$ y entonces

$$\frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n\,(n+1)} &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right) + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{N+1}.\end{aligned}$$

Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n\,(n+1)} = \lim_{N\to\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1.$$

Por lo tanto la serie es convergente y su suma es 1.

Solución 3.4. Recordamos que conocemos las series de potencias del seno y el coseno centradas en $c = 0$

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \text{ y } \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Tenemos que

$$\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Como $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x - \frac{\pi}{4})^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(x - \frac{\pi}{4})^{2n}\right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\frac{(x - \frac{\pi}{4})}{1!} - \frac{(x - \frac{\pi}{4})^3}{3!} + \frac{(x - \frac{\pi}{4})^5}{5!} - \frac{(x - \frac{\pi}{4})^7}{7!} + \frac{(x - \frac{\pi}{4})^9}{9!} - \cdots\right. \\ &\quad \left. 1 - \frac{(x - \frac{\pi}{4})^2}{2!} + \frac{(x - \frac{\pi}{4})^4}{4!} - \frac{(x - \frac{\pi}{4})^6}{6!} + \frac{(x - \frac{\pi}{4})^8}{8!} - \cdots\right\}.\end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x) &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(x-\frac{\pi}{4})}{1!} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(x-\frac{\pi}{4})^2}{2!} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(x-\frac{\pi}{4})^3}{3!} \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(x-\frac{\pi}{4})^4}{4!} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(x-\frac{\pi}{4})^5}{5!} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(x-\frac{\pi}{4})^6}{6!} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(x-\frac{\pi}{4})^7}{7!} \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(x-\frac{\pi}{4})^8}{8!} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(x-\frac{\pi}{4})^9}{9!} - \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(-1)^{[n/2]}}{n!}(x-\frac{\pi}{4})^n
\end{aligned}$$

donde $[n/2]$ es la parte entera de $n/2$.

Solución 3.5. Sea $b_n = \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{3}\right)^{2n}$ para $x \neq 0$ [6], calculamos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)+1}\left(\frac{x}{3}\right)^{2n+2}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{3}\right)^{2n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2}\frac{|x|^2}{9} = \frac{|x|^2}{9}.$$

Entonces por el *criterio del cociente absoluto* tenemos que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{3}\right)^{2n}$ converge[7] para $\frac{|x|^2}{9} < 1$ y diverge para $\frac{|x|^2}{9} > 1$, es decir, converge para $|x| < 3$ y diverge para $|x| > 3$. Entonces el radio de convergencia es 3. Para hallar el conjunto de convergencia nos hace falta ver que ocurre en $x = -3$ y $x = 3$. Cuando $x = -3$, tenemos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(-1)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1},$$

que es una serie alternante y que converge por el *criterio de la serie alternante* (ya que $a_n = \frac{1}{n+1}$ es decreciente, positiva y converge a 0 cuando n tiende a infinito). Cuando $x = 3$, tenemos la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(1)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ y ya vimos que esta serie converge. Entonces el conjunto de convergencia es $[-3, 3]$.

[6] Una serie de potencia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ siempre converge en $x = 0$, así que realmente sólo hace falta analizar que ocurre cuando $x \neq 0$.

[7] Siendo más precisos, el criterio del cociente absoluto nos dice que nuestra serie converge para $|x| < 1$ y $x \neq 0$.